§0 Pourquoi ? Fixer k corps parfait de caractéristique $p>>$

Rappelons qu'on a obtenu

1. La filtration de Hodge par
$\mathbb{G}_a^{dR,+} := \mathrm{Cone}(\mathbb{G}_a^\sharp(-1) \to \mathbb{G}_a)$

2. La filtration conjugate par
$\mathbb{G}_a^{dR,c} := \mathrm{Cone}(F_* M_u \xrightarrow{d_u} F_* W)$
où M_u : est un champs gradué
$\cdots \leftarrow \underset{-1}{W} \xleftarrow{id} \underset{0}{W} \leftarrow \underset{1}{\mathbb{G}_a^\sharp} \leftarrow 0$

De plus, ils ont les même pieces graduées.
Alors certaines questions se lèvent naturellement :

Question : ① comment relier les deux fil ?

② comment construire les coh p-adiques avec coefficient ?

On souhait qu'aussi les opérations de W s'agissent naturellement

$W \underset{V}{\overset{F}{\rightleftarrows}} W \quad F\circ V = p$, $\sim$ les autres relation subtile

Voici la Réponse rapide : la filtration de Nygaard + la théorie de Gauge qu'on va introduire aujourd'hui

Ici, on énonce le théorème de Mazur pour un cible concrète

Thm (Mazur)

Soit X/k lisse propre. $H^\cdot_{crys}(X/k)$ sans p-torsion, la suite spectral "Hodge à deRham" dégenère. (ce sont-tous condition de platitude)

Alors le F-crystal

$\phi_{X/W} : H^n_{crys} \to \phi_* H^n_{crys}$ détermine la fil de Hodge sur H^n_{dR} pour tous n au sens de

$$\mathrm{Im}\left(\underline{\phi^{-1}_{X/W}(p^i \phi_* H^n_{crys})} \to H^n_{crys}/p = H^n_{dR}\right) = \mathrm{Fil}^i_H H^n_{dR}$$

On est très motivé de chercher cette filtration au niveau de cat derivee

Remarque Sous la même condition, on a

$$\mathrm{Fil}^{conj}_i H^n_{dR} = \mathrm{Im}\left(\underline{\phi^{-1}_{X/W}(p^i \phi_* H^n_{crys})} \xrightarrow{\frac{\phi}{p^i}} \phi_* H^n_{crys}/p \simeq \phi_* H^n_{dR}\right)$$

Notre cible est de le prouver.

Lemme $R :=$ ann. reduit $M \in \mathrm{Perf}(R)$
Si $x \in \mathrm{Spec}\, R \mapsto \dim_{k(x)} H^i(M \otimes^L_R k(x)) \in \mathbb{N}$ est localement constant, alors $H^i(M)$ est tout projectif.

① $\mathcal{H}_N(X) \in \mathrm{Vect}(k^N) = \mathrm{Vect}(k^N_{alg})$

①$R\Gamma_\Delta(X)$ ②$R\Gamma(X, DR)$ ③$R\Gamma(X, \oplus \Omega^i[-i])$

X sans p-torsion $\overset{\text{Nakayama}}{\Rightarrow}$ ①=② au niveau du nombre de Betti
s.s. Hodge à deRham $\Rightarrow$ ②=③

② $\mathcal{H}^n_N(X) \rightsquigarrow (M_u, M_t, \Psi)$
$M_t = H^n_{crys}(X/W)$
$M_u = H^n_\Delta(X/W)$
$M_t \xrightarrow{\phi} M_u$
for $i \geq 0$
$M^i = \phi^{-1}(p^i H^n_\Delta(X/W)) \cap \cancel{H^n_{crys}}(X/W)$

$\mathrm{Fil}^i_N H^i_{crys}(X/W) = M^i \to M^i/M^{i+1} = \mathrm{Fil}^i_H H^i(X, DR)$

§1 Prismatisation filtrée de Nygaard

Construction

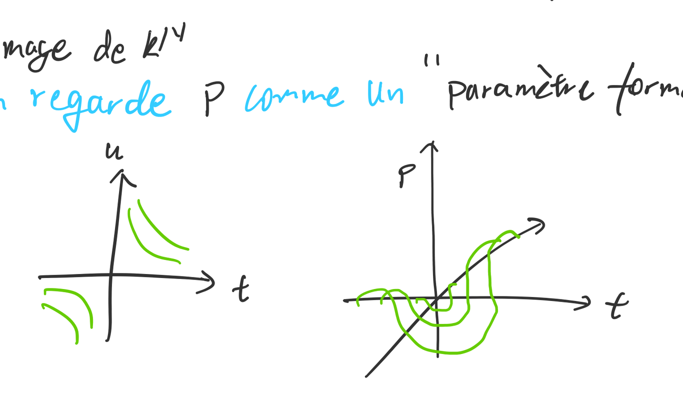
$\mathrm{Ree}(p^\cdot W) := W[u,t]/(ut-p) \circlearrowleft \mathbb{G}_m$ le gp multiplicatif
$|t| = -|u| = 1$

où $\cdots \overset{-1}{W} \oplus \overset{0}{W} \oplus \overset{1}{pW} \oplus \overset{2}{p^2 W} \cdots$

$k^N := [\mathrm{Spf}(W[u,t]/(ut-p)) / \mathbb{G}_m]$

le champs classifiant de : $\mathcal{O}(-1) = L \underset{u}{\overset{t}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}$ fibré en droites $ut = tu = p$

L'image de k^N
On regarde p comme un "paramètre formelle"



① $\mathrm{Spf}\, W = (k^N)_{t \neq 0} \hookrightarrow k^N \hookleftarrow (k^N)_{t=0} = \mathrm{Spec}\, k[u]/\mathbb{G}_m$
$\mathbb{G}_a^{crys} \to \mathbb{G}_a^N \leftarrow (\mathbb{G}_a^N)_{t=0}$, $F_* \mathbb{G}_a^N = \mathbb{G}_a^{dR,c}$
$M_u \to F_* W$, $W \to F_* W$ Cartesian + conj. sur
$R\Gamma_{crys}(X/W)$; $\mathrm{Fil}^{conj}_\infty R\Gamma(X, DR)$

jusqu'ici le rôle de t ou u est symétrique

② $\mathrm{Spf}\, W = (k^N)_{u \neq 0} \hookrightarrow k^N \hookleftarrow (k^N)_{u=0} = \mathrm{Spec}\, k[t]/\mathbb{G}_m$
$W/pW = \mathbb{G}_a^\Delta \to \mathbb{G}_a^N \leftarrow \mathbb{G}_a^{dR,+}$
$R\Gamma_\Delta(X/W)$; $\mathrm{Fil}^\ast_H R\Gamma(X, DR)$
$\mathbb{G}_a^N|_{u=0} = \mathrm{Cone}(\mathbb{G}_a^\sharp \oplus F_* W \to W) = \mathrm{Cone}(\mathbb{G}_a^\sharp \to \mathbb{G}_a) = \mathbb{G}_a^{dR,+}$

③ $k^N|_{u=t=0} = B\mathbb{G}_{m,k}$
$\mathbb{G}_a \oplus BV(L)^\sharp$; $\bigoplus_n R\Gamma(X, \Omega^n_{X/k}[-n])(n)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & W & \xrightarrow{F} & F_* W & \to 0 \\
& {\scriptstyle u^\sharp}\downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0 \to & V(L)^\sharp & \longrightarrow & M_u & \longrightarrow & F_* W & \to 0 \\
& {\scriptstyle t^\sharp}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & W & \longrightarrow & F_* W & \to 0
\end{array}$$

$\times p$; cocart

$\mathbb{G}_a^N := \mathrm{Cone}(M_u \to W)$

Def. X/k lisse. $\pi : X^N \to k^N$
$X^N(\mathrm{Spec}\, R \to k^N) = \mathrm{Map}(\mathbb{G}_a^N(R), X)$ ou + localisation ?
$\mathcal{H}_N(X) := R\pi_* \mathcal{O}_{X^N} \in \mathcal{D}(k^N)$

Thm Par la proj $k^N \xrightarrow{t} \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$
$\mathcal{H}_N(X)$ est une fil complète sur $\phi^* R\Gamma_\Delta(X/W) = R\Gamma_{crys}(X/W)$
il existe un morphism de filtration
t.q. $\mathrm{Fil}^n_N \phi^* R\Gamma_\Delta(X/W) \to p^n R\Gamma_\Delta(X/W)$

le composante de pois n ; torsion de Breuil-Kysin
$\mathrm{Gr}^n_H \phi^* R\Gamma_\Delta(X/W) \to R\Gamma_\Delta(X, DR)\{n\}$
$\cong \phi_* \mathrm{Fil}^{conj}_n R\Gamma(X, DR)$

Dem $W/pW \to \mathbb{G}_a^N \to F_* W/pW$

$p^\cdot R\Gamma_\Delta(X/W) \leftarrow \mathcal{H}_N(X) \leftarrow p^\cdot R\Gamma_{crys}(X/W)$

① $t \neq 0$
donc $\mathcal{H}_N(X)|_{t \neq 0} = R\Gamma_{crys}(X/W)$
pour la complétude : tout objets sont p-complétée
$0 \to \mathcal{O}_N/p \to \mathcal{O}_N/u \oplus \mathcal{O}_N/t \to \mathcal{O}_N/(u,t) \to 0$
Mais $\mathcal{H}_N|_{u=0} = \mathrm{Fil}^\cdot_H R\Gamma(X, DR)$

② $t = 0$ $W/p \to \mathbb{G}_a^{dR,c}$
oubliant la torsion de B-K
$\square$

Remarque : pour faire pullback, on utilise $p \cdot t$ correctement

Maintenant on peux voir $\mathcal{H}_N$ ou Fil_N est très proche au Théorème de Mazur.
Mais pour la calcul au niveau de coh, on a besoin de purité de esp vectoriel sur k^N

§2 Gauge sur k

Def (Gauge sur X) $\mathrm{Gauge}(X) := \mathcal{D}(X^N)$

$E \in \mathrm{Gauge}(k)$ $\quad \mathcal{O} \underset{t}{\overset{u}{\rightleftarrows}} L =: \mathcal{O}(-1)$
$M^i := R\Gamma(k^N, E(-i))$
$\rightleftarrows M^{i+1} \underset{u}{\overset{t}{\rightleftarrows}} M^i \underset{u}{\overset{t}{\rightleftarrows}} M^{i-1} \rightleftarrows$
$tu = ut = p$ "module de Dieudonné" ?
$M^\infty := \mathrm{colim}_i M^i \xleftarrow{u^\infty} M^\cdot \xrightarrow{t^\infty} \mathrm{colim}_i M^{-i} =: M^{-\infty}$

Si : E est parfait, t, u est eventuellement quasi-iso
donc $M^\infty[\frac{1}{p}] \simeq M^{-\infty}[\frac{1}{p}]$

Ex $E = \mathcal{H}_N(X)$
$R\Gamma_\Delta(X/W) \underset{\phi}{\overset{u^\infty}{\longleftarrow}} R\Gamma(k^N, \mathcal{H}_N(X)) \overset{t^\infty}{\xrightarrow{\sim}} \phi^* R\Gamma_\Delta(X/W)$

Lemme (GAGA formelle)
$k^N_{alg} := [\mathrm{Spec}(W[u,t]/(ut-p)) / \mathbb{G}_m]$
$\pi : k^N \xrightarrow{\text{plongement}} k^N_{alg}$ complétion p-adique
(1) π^* induit les equivalences sur $\mathrm{Vect}(-)$ $\mathrm{Coh}^\heartsuit(-)$ $\mathrm{Parf}(-)$
(2) $R\Gamma(k^N, \_) : \mathrm{Perf}(k^N) \to \mathrm{Parf}(W)$

Remarque 1) $R\pi_* \pi^* \mathcal{O}_{k^N_{alg}} \simeq \mathcal{O}_{k^N_{alg}}$
2) $\mathcal{H}_N(X)|_{t=u=0} = R\Gamma(X, \oplus \Omega^n_X[-n])$ est parfait

Prp (Purité des espaces vectoriel)
$\mathrm{Vect}(k^N) \xrightarrow{\simeq} \{(M_u, M_t, \Psi) \mid M_u, M_t \in \mathrm{Vect}(W),\ M_u[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\Psi} M_t[\frac{1}{p}]\}$ Mod des W-treillis
$E \mapsto (E|_{u \neq 0}, E|_{t \neq 0}, \phi[\frac{1}{p}])$
est une équivalence.

Dem $\mathrm{Vect}(k^N) \underset{\pi^*}{\overset{GAGA}{\xleftarrow{\sim}}} \mathrm{Vect}(k^N_{alg}) \xrightarrow[\sim]{\text{codim} \geq 2} \mathrm{Vect}(k^N_{alg} - V(u,t))$
$\cong \mathrm{Vect}(k^N_{alg}|_{u \neq 0}) \times_{\mathrm{Vect}(k^N_{alg}|_{p \neq 0})} \mathrm{Vect}(k^N_{alg}|_{t \neq 0})$
$\square$

Remarque 1) $\mathrm{Pic}(k^N) \simeq \mathbb{Z} \times BW^*$
2) (M_u, M_t, Ψ) :
$M^i = p^i M_u \cap M_t \simeq p^{-i} M^i = M_u \cap p^{-i} M_t$
$\rightleftarrows M^{i+1} \underset{\times p}{\rightleftarrows} M^i \underset{\times p}{\rightleftarrows} M^{i-1} \underset{\times p}{\rightleftarrows} M^{i-2} \rightleftarrows$